Granice ciągów liczb, wektorów i funkcji

1. Oblicz granice wskazując wykorzystane twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}},\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right),\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+1},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}+1},\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-n\right),\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

2. Oblicz granice wskazując wykorzystane twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8n^3}{n^3+1}},\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right),\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+3},$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}+7},\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4}-n^2\right),\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n},\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right),$$

3. Oblicz granice wskazując wykorzystane twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\frac{n^4}{4n^4+1}\\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n+1}\end{bmatrix},\ \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}\\ \sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\\ \frac{(-1)^n}{n^2+1}\end{bmatrix},\ \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\frac{arc\,tg(n^4+1)}{2^n+1}\\ \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{2^n+4}}\end{bmatrix}$$

4. Oblicz granice (nwskazując wykorzystane twierdzenia

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\frac{n^3}{4n^3+1}\\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{2n+3}\end{bmatrix},\ \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}\\ \sqrt{4n^2+1}-2n\\ \frac{(-1)^{3n}}{n^3+4}\end{bmatrix},\ \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}\frac{arc\,tg\,(\ln n)}{2n^2+1}\\ \frac{\sqrt{n+8}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{3^n+1}}\end{bmatrix}$$

5. Oblicz odległość d(f,g) dla:
   a/ f(x)=x oraz g(x)=x^2, x∈<0,1>; b/ f(x)=x^2 oraz g(x)=x^3, x∈<0,$^1/_2$>;
   c/ f(x)=sin x oraz g(x)=cos x, x∈<0,$^\pi/_2$>; d/ f(x)=x, g(x)=x^2, x∈<0,2>
   e/ f(x)=x, g(x)=x^2, x∈<-1,2>;
6. Oblicz odległość d(f,g) dla:
   a/ f(x)=x oraz g(x)=x^2, x∈<-1,1>; b/ f(x)=x^2 oraz g(x)=x^3, x∈<0,1>;
   c/ f(x)=sin x oraz g(x)=cos x, x∈<0,$^\pi/_4$>; d/ f(x)=ln x, g(x)=0, x∈<1,e>
7. Oblicz odległość $f_2(x_0)$ od $f_1(x_0)$, gdy $f_n(x)=\frac{1}{n^2x+1}$, x_0∈<0,1> podstawiając dowolnie x_0.
8. Oblicz odległość $f_2(x_0)$ od $f_1(x_0)$, gdy $f_n(x)=\frac{1}{n^2x}$, x_0∈<$^1/_2$,1> podstawiając dowolnie x_0.
9. Czy funkcje $f_n(x)=\frac{nx}{n^2x+1}$ są malejące? Wsk. $\frac{nx}{n^2x+1}=\frac{1}{n}\frac{n^2x}{n^2x+1}$
10. Czy jest malejący ciąg odległości $f_{n+1}(x_0)$ od $f_n(x_0)$, dla ciągu funkcji $f_n(x_0)=\frac{nx_0}{n^2x_0+1}$ i ustalonego samodzielnie punktu x_0∈<1,2>?
11. Wyznacz granicę punktową f(x) ciągu f_n
    a/ dla ciągu $f_n(x)=\frac{n^3x+1}{n^3x^2+1}$, x∈<$^1/_2$,1> b/ $f_n(x)=\frac{n^2x+n}{n^2x^2+x}$, x∈<$^1/_2$,4>.
    Zbadaj ciągłość f(x) oraz sporządź wykresy tych funkcji.
12. Czy granica punktowa f(x) ciągu $f_n(x)=\frac{1}{n^3x^2+1}$, gdzie x∈<1,2> należy do kuli K(g,1) – zbioru punktów odległych mniej niż 1 od środka czyli funkcji g, gdzie g(x) jest granicą punktową ciągu $g_n(x)=\frac{n^3x}{n^3x^2+1}$, gdzie x∈<1,2>.
13. (*) Oblicz granice funkcji wskazując wykorzystane twierdzenia

$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{(x-1)y}{x^2-2x+y^2+1},\ \lim_{\substack{x\to1\\ y\to-2}}\frac{(x-1)(y+2)}{(x-1)^2+(y+2)^2},\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^4x^4}{x^8+y^8},\ \lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\frac{(x-1)y}{x^2-2x+y^2+1}$$